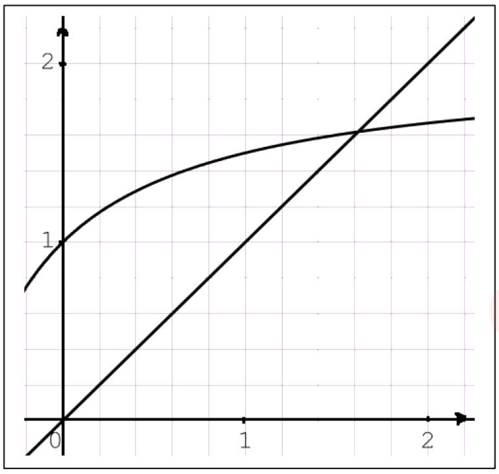
نص الفرض :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;2]$ بِـ : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو موضح في الشكل أدناه :



1) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم

استنتج أنه إذا كان $x\in[1;2]$، فإن : $f(x)\in[1;2]$.

2) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بِـ : $u_0=1$ ، $v_0=2$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$ ، $v_{n+1}=f(v_n)$.

أ. مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، v_0 ، v_1

لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) . مبرزا خطوط الانشاء.

ب. أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n)و(v_n).

3) برهن بالتراجع عن الخواص التالية : من أجل كل عدد طبيعي n :

" $1\le u_n\le 2$" ؛ " $1\le v_n\le 2$" ؛ " $u_n\le u_{n+1}$ "و" $v_n\ge v_{n+1}$ " .

4) أ. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n-u_n\ge 0$ و $v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{1}{4}(v_n-u_n)$.

ج. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n-u_n\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

د. استنتج أن للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس النهاية l .

هـــ. عين القيمة المضبوطة للعدد l .

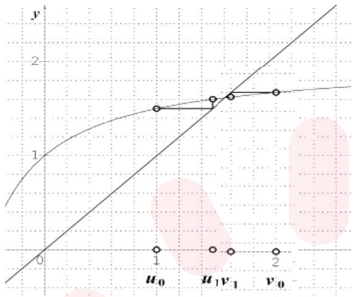
العلامة			

2 1. دراسة اتجاه تغير الدالة f : $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}\succ 0$ اذن الدالة f متزايدة تماما على $[1;2]$.

بما ان f متزايدة تماما على $[1;2]$ فان $x\in[1;2]$ يعني $f(x)\in[f(1);f(2)]$ أي $f(x)\in[1;2]$.

2. تمثيل الحدود على محور الفواصل:

2



من خلال الرسم يتضح لنا ان (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ولهما نفس النهاية أي متقاربتان نحو L .

3. البرهان بالتراجع:

1) $1\le u_n\le 2$:

1 * n=0 نجد $u_0=1$ أي $1\le u_0\le 2$ اذن الخاصية محققة من اجل n=0.

* نفرض ان $1\le u_n\le 2$ محققة ونبرهن ان $1\le u_{n+1}\le 2$ محققة:

الدالة f متزايدة معناه $1\le u_n\le 2$ يعطي لنا $f(1)\le f(u_n)\le f(2)$ أي $1\le u_{n+1}\le 2$.

- نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ان $1\le u_n\le 2$.

2) $1\le v_n\le 2$:

1 * n=0 نجد $v_0=2$ أي $1\le v_0\le 2$ اذن الخاصية محققة من اجل n=0.

* نفرض ان $1\le v_n\le 2$ محققة ونبرهن ان $1\le v_{n+1}\le 2$ محققة:

الدالة f متزايدة معناه $1\le v_n\le 2$ يعطي لنا $f(1)\le f(v_n)\le f(2)$ أي $1\le v_{n+1}\le 2$.

- نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ان $1\le v_{n+1}\le 2$.

3) $u_n\le u_{n+1}$:

1 * n=0 نجد $u_0=1$ و $u_1=f(u_0)=\dfrac{3}{2}$ و منه $u_0\le u_1$ اذن الخاصية محققة من اجل n=0 .

* نفرض ان $u_n\le u_{n+1}$ ونبرهن ان $u_{n+1}\le u_{n+2}$:

الدالة f متزايدة معناه $u_n\le u_{n+1}$ يعطي لنا $f(u_n)\le f(u_{n+1})$ أي $u_{n+1}\le u_{n+2}$.

- نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ان $u_n\le u_{n+1}$.

4) $v_n\ge v_{n+1}$:

1 * n=0 نجد $v_0=2$ و $v_1=f(v_0)=\dfrac{5}{3}$ و منه $v_0\ge v_1$ اذن الخاصية محققة من اجل n=0 .

* نفرض ان $v_n \geq v_{n+1}$ ونبرهن ان $u_{n+1} \leq u_{n+2}$:

الدالة f متزايدة معناه $v_n \geq v_{n+1}$ يعطي لنا $f(v_n) \geq f(v_{n+1})$ أي $v_{n+1} \geq v_{n+2}$.

- نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ان $v_n \geq v_{n+1}$.

4) أ) لدينا :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = f(v_n) - f(u_n) = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$$

$$= \frac{(2v_n+1)(u_n+1) - (v_n+1)(2u_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)} = \boxed{\frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}}$$

2

ب) استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $v_n - u_n \geq 0$ و $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$:

* من اجل n=0 نجد $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1 \geq 0$ اذن الخاصية محققة من اجل n=0.

2

* نفرض ان $v_n - u_n \geq 0$ ونبرهن ان $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$:

لنا $v_n - u_n \geq 0$ وبما ان الدالة f متزايدة نجد $f(v_n) - f(u_n) \geq 0$ أي $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$.

* نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $\boxed{v_n - u_n \geq 0}$.

ولدينا $1 \leq u_n \leq 2$ ومنه $2 \leq u_n + 1 \leq 3$ ....(1) وأيضا $1 \leq v_n \leq 2$ ومنه $2 \leq v_n + 1 \leq 3$ ...(2)

2

بالجداء (1) في (2) نجد $4 \leq (u_n+1)(v_n+1) \leq 9$ ومنه $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \frac{1}{4}$ أي

$\frac{1}{9}(v_n - u_n) \leq \frac{v_n - u_n}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$ ومنه $\boxed{v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)}$.

ج) اثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

وجدنا سابقا ان $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$ ومنه :

2

$$v_1 - u_1 \leq \frac{1}{4}(v_0 - u_0)$$
$$v_2 - u_2 \leq \frac{1}{4}(v_1 - u_1)$$
$$v_3 - u_3 \leq \frac{1}{4}(v_2 - u_2)$$
$$\vdots$$
$$v_n - u_n \leq \frac{1}{4}(v_{n-1} - u_{n-1})$$

نجد $v_n - u_n \leq \underbrace{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \ldots \times \frac{1}{4}}_{n\ fois}(v_0 - u_0)$ ومنه $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

د) مما سبق وجدنا انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n \leq u_{n+1}$ أي $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ان المتتالية متزايدة

2

وأيضا $v_n \geq v_{n+1}$ اي $v_{n+1} - v_n \leq 0$ أي ان المتتالية (v_n) متناقصة وأيضا لنا $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty}(v_n - u_n) \leq \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty}(v_n - u_n) = 0$ ومنه فانهما متتاليتين متجاورتين أي لهما نفس النهاية L .

2

هـ) تعيين القيمة المضبوطة للنهاية L : النهاية L تحقق $\frac{2L+1}{L+1} = L$ ومنه نجد المعادلة $L^2 - L - 1 = 0$

وبحل هذه المعادلة وعلما انها موجبة لان جميع الحدود موجبة نجد $\boxed{L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.